

# Transferencia Calórica en Sistema Metal-Molde

## ➤ Soluciones Analíticas Exactas

El análisis parte por considerar cada uno de los métodos imperantes de transferencia de calor que son descritos a continuación:

K: Transferencia de calor por conducción.

N: Transferencia térmica newtoniana.

C: Transferencia térmica por conducción.

R: Transferencia térmica por radiación.

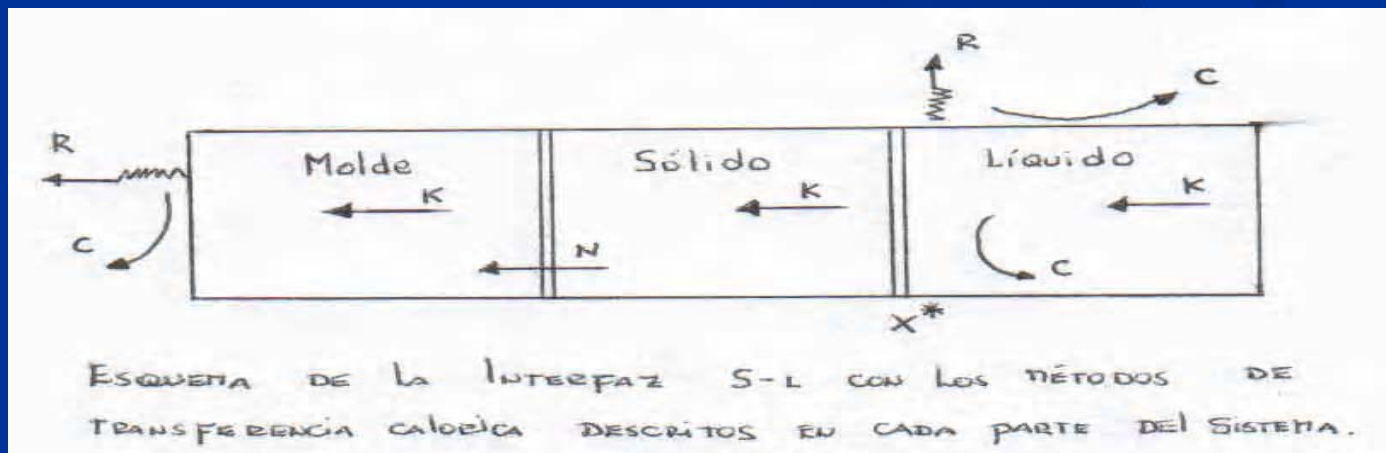
Sin embargo no se pueden considerar todos los métodos, puesto que el análisis sería demasiado complejo, por lo que las soluciones se restringen aplicando ciertos supuestos; y en general teniendo las siguientes consideraciones:

1. En general la interfase S-L no es plana.
2. El análisis se debe realizar en estado transiente (que involucra un cambio de fase).

## ➤ Soluciones Analíticas Exactas

3. La geometría de las piezas de fundición es compleja y la extracción calórica es más sensible en aquellas zonas geométricamente complejas.
4. Se trata con piezas finitas (en la realidad) que difieren de los tratamientos matemáticos que involucran condiciones semi-infinitas.

A continuación se presenta un esquema de la interfaz S-L con los métodos de transferencia calórica.



## ➤ Soluciones Analíticas Exactas

Este tipo de soluciones se caracterizan por no tener aproximaciones del carácter matemático, pero si se consideran simplificaciones de carácter físico que se alejan de la realidad, pero la simplificación más considerable es que la resistencia de la interfaz metal/molde es nula y las condiciones de borde que se imponen al sistema son:

1. El flujo de calor es unidireccional: tanto metal como molde se comportan como semiinfinitos (en consecuencia la interfaz es plana).
2. No existen flujos de masa: convección es inexistente y el metal entra instantáneamente en contacto con el molde.
3. Contacto térmico entre el metal y el molde es perfecto: no hay resistencia térmica al flujo calórico en la interfaz metal/molde.
4. Las propiedades físicas del metal y el molde se mantienen constantes: no varían con la temperatura ni con el cambio de fase.

$$M = \text{cte. del molde} = bs/bM$$

$$b = \text{difusividad calórica} = \sqrt{k c \times d}$$

$$m = \text{cte. del metal} = bL/bs$$

$$n = \text{cte. del metal} = \sqrt{as/aL}$$

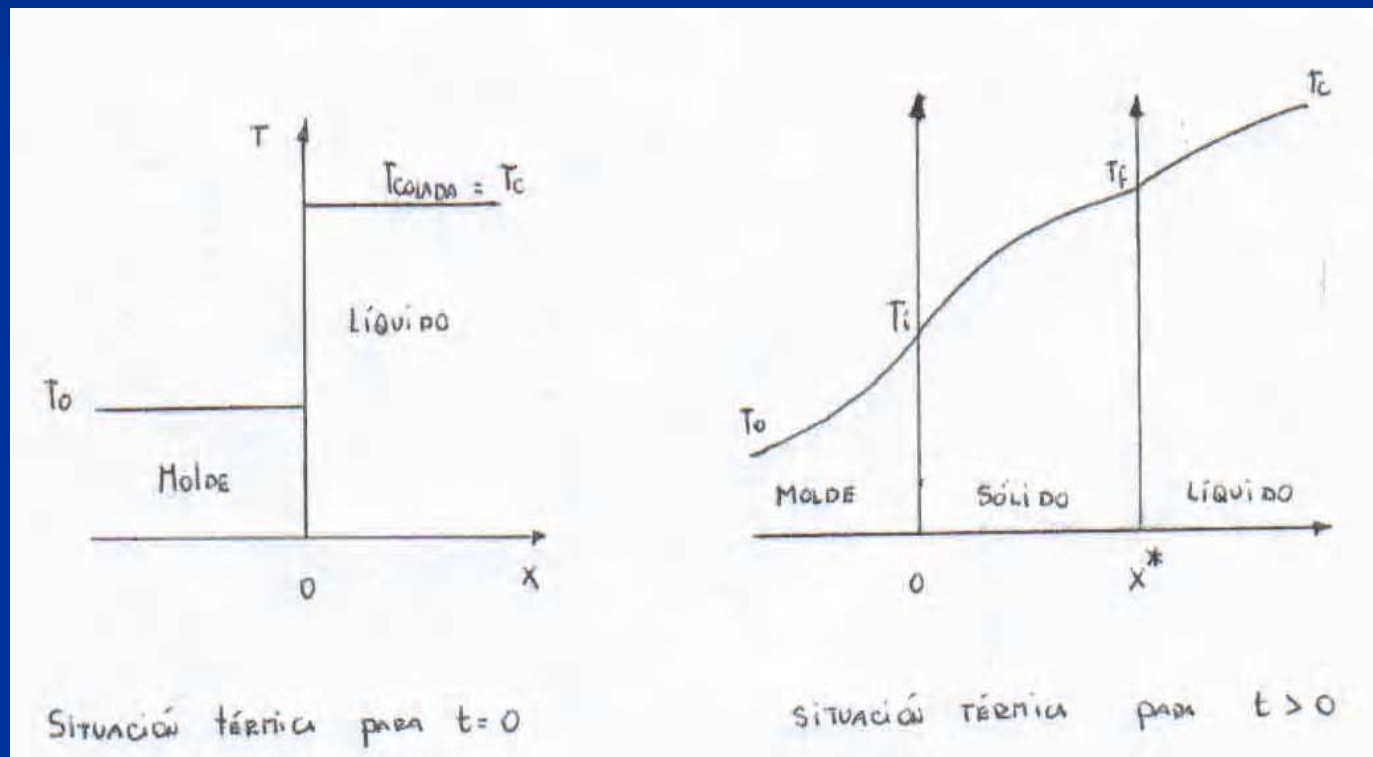
$$a = \text{difusividad térmica} = k/(c d)$$

$$S+ = \text{sobrecalentamiento adimensional} = S/(T - T_0)$$

$$H+ = \text{calor latente adimensional} = H / (T_f - T_0) \text{ cs}$$

## ➤ Soluciones Analíticas Exactas

La obtención de la expresión de solidificación, se basa considerando la siguiente figura :



## ➤ Soluciones Analíticas Exactas

Y se considera lo siguiente:

1. Se aplica la ecuación de Fourier en estado transiente:

$$\alpha \frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1) \quad \text{y la solución de la ecuación es :}$$

$$T(x, t) = A + B \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\sqrt{\alpha t}} \right) \right] \quad (2) \quad \text{donde A y B son constantes, y esta solución se denomina de Schwarz}$$

2. Se aplica la ecuación de Flujo calórico por conducción:

$$q = -K \frac{\partial T}{\partial X} \quad (3)$$

3. El análisis queda reducido a la aplicación de la solución general (2) para las condiciones de borde (c - f) y a la consideración de un balance térmico por medio de la ecuación (3).

## ➤ Soluciones Analíticas Exactas

✓ Obtención de la constante de solidificación  $\Theta$ :

Realizando un balance térmico en la interfase S-L, se tiene:

$$K_s \left( \frac{\partial T}{\partial X} \right) - K_l \left( \frac{\partial T}{\partial X} \right)_x - H \rho_s \left( \frac{\partial X}{\partial t} \right) = 0 \quad (7)$$

Cuya solución esta dada por:

$$\frac{\exp(-\Theta^2)}{M + \operatorname{erf}(\Theta)} - mS + \frac{\exp(-n^2\Theta^2)}{\operatorname{erf}(n\Theta)} - \sqrt{\pi}H + \Theta = 0 \quad (8)$$

Y finalmente la constante se obtiene por iteración.



## ➤ Soluciones Analíticas Exactas

✓ Se obtienen distintos perfiles de temperatura, de acuerdo a las condiciones de borde planteadas, y se dan a continuación:

1. Para  $x < 0$  (molde)

$$T_m(x, t) = T_0 + \frac{T_f - T_0}{1 + \frac{\text{erf } \Theta}{M}} \left[ 1 + \text{erf} \left( \frac{X}{2\alpha_m t} \right) \right]$$

2. Para  $x = 0$  (interfase metal/molde)

$$T_i = \text{Cte} = T_0 + \frac{T_f - T_0}{1 + \frac{\text{erf } \Theta}{M}}$$

3. Para el metal solidificado ( $0 < x < x^*$ )

$$T_s(x, t) = \frac{T_f - T_0}{M + \text{erf } \Theta} \left[ M + \text{erf} \left( \frac{X}{2\alpha_s t} \right) \right]$$

## ➤ Soluciones Analíticas Exactas

✓ Se obtienen distintos perfiles de temperatura, de acuerdo a las condiciones de borde planteadas, y se dan a continuación:

4. Para el metal líquido ( $x > x^*$ )

$$T_l(x, t) = T_c + \frac{S}{\operatorname{erfc}(n\Theta)} * \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\alpha_l \sqrt{t}} \right) \right]$$

## ➤ Soluciones particulares de la solución de Schwarz

I Soluciones que consideran sobrecalentamiento en el liquido:

- ✓ **Solución particular de Newmann:** Considera que el molde es un sumidero perfecto de calor, es decir la difusividad termica de el molde  $b_m = \infty$ , de esta forma  $M=0$ , y la expresion (8) queda:

$$\frac{\exp(-\Theta^2)}{\operatorname{erf}(\Theta)} - mS + \frac{\exp(-n^2\Theta^2)}{\operatorname{erfc}(n\Theta)} - \sqrt{\pi}H^+\Theta = 0$$

Y la distribución de temperatura estará dada por:

1. Para  $x < 0$      $T_i = T_0 = \text{Cte}$

2. Para  $x = 0$      $T_i = T_0 = \text{Cte}$

3. Para  $0 < x < x^*$

$$T_s(x, t) = T_0 + \frac{T_f - T_0}{\operatorname{erf} \Theta} \left[ \operatorname{erf} \left( \frac{x}{2\alpha_s \sqrt{t}} \right) \right]$$

4. Para  $x > x^*$

$$T_l(x, t) = T_c - \frac{S}{\operatorname{erfc}(n\Theta)} \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\alpha_l \sqrt{t}} \right) \right]$$

## ➤ Soluciones particulares de la solución de Schwarz

I Soluciones que consideran sobrecalentamiento en el liquido:

- ✓ **Solución particular de Lightfoot:** Se hace una simplificación mas a la solución de Newmann al considerar que  $M=0$  y  $m=n=1$  por lo que la expresión (8) queda:

$$\frac{\exp(-\Theta^2)}{\operatorname{erf}(\Theta)} - S^+ \frac{\exp(-\Theta^2)}{\operatorname{erfc}(\Theta)} - \sqrt{\pi} H^+ \Theta = 0$$

Y de los perfiles de temperatura el único que cambia es:

4. Para  $x > x^*$

$$T_l(x, t) = T_c - \frac{S}{\operatorname{erfc}(\Theta)} \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\alpha_l \sqrt{t}} \right) \right]$$

Sin embargo las soluciones anteriores tienen dificultades para obtener la constante de solidificación que son descritas a continuación:

## ➤ Soluciones particulares de la solución de Schwars

### ✓ Dificultades de las soluciones obtenidas:

1. Mantienen contacto intimo con las paredes de la lingotera solamente mientras están en estado liquido.
2. El momento convectivo de colada y la convección natural afectan el gradiente de temperatura en el liquido.
3. En los lingotes convencionales (reales) la extracción de calor es multidimensional.
4. El frente de solidificación no es plano.